高数上期中模拟题

(治学团 · 文治学辅与发展中心)

班级：__________　　　　学院：__________

姓名：__________　　　　序号：__________

成绩

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 若$a \neq 0$，$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{ax}-\cos ax}{3x}, & x>0 \\ b, & x=0 \\ \dfrac{\tan ax-\sin ax}{x^3}, & x<0 \end{cases}$ 有可去间断点$x=0$，则$b \neq$______.

2. 设$y=x\arctan\dfrac{1}{x}+\ln(e^x+2^{\cos x})$，$\lim\limits_{x\to 0^+} y'=$______.

3. 求摆线的参数方程$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$所确定的函数在$t\in(0,2\pi)$上的二阶导数$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$______.

4. 曲线$f(x)=\dfrac{x^3+4x^2+2x+1}{x^2+3x+4}$的斜渐近线方程是______.

5. 极限$\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-e\right]=$______.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$, 其中$a,b$是常数，则（ ）.

（A）$a=b=1$　　（B）$a=-1$，$b=1$

（C）$a=1$，$b=-1$　　（D）$a=b=-1$

2. 设$f(x)$，$\varphi(x)$是定义在$[a,b]$上的连续函数，$f(x)$为连续可导函数且$f'(x)>0$，$f(x)$的值域为$[a,b]$，$\varphi(x)$只在$x=x_0(x_0\in(a,b))$处不可导且该处的左右导数存在，$f(u_0)=x_0$，则（ ）.

（A）$\varphi(f(x))$在u_0处可导　　（B）$\varphi(f(x))$在u_0处连续但不可导

（C）$\varphi(f(x))$在u_0处有定义但不连续　　（D）$\varphi(f(x))$在u_0处无定义

3. 极限$\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^3+\frac{1}{2}x-tan\frac{1}{x})e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}]$等于（ ）.

（A）1　　（B）0　　（C）e　　(D)$+\infty$

4. 设函数$f(x)$可导, $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$, 若使$F(x)$在$x=0$处可导，则必有（ ）.

（A）$f(0)=0$　　（B）$f'(0)=0$

（B）$f'(0)+f(0)=0$　　（D）$f(0)-f'(0)=0$

5. 设函数$f(x)$在$x=a$处可导，则函数$|f(x)|$在$x=a$处不可导的充分必要条件是（ ）.

（A）$f(a)=0$且$f'(a)=0$　　（B）$f(a)=0$且$f'(a)\neq0$

（C）$f(a)>0$且$f'(a)>0$　　（D）$f(a)<0$且$f'(a)<0$

三、计算题（每小题 7 分，共 35 分）

1. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^{\sin x}-\sqrt{\cos x}}{e^{\sin x}-1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

2. 求曲线$\rho = e^{\theta}$在点$(\rho,\theta) = \left(e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2}\right)$的切线方程.

3. 设$y = \sin^2 3x + \cos\dfrac{x^2}{5} + \tan\sqrt{x}$，求$y'$.

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

5. 求$f(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{x}}$的间断点并判定间断点的类型.

四、证明题（第 1 题 8 分，第 2 题 14 分，第 3 题 13 分，共 35 分）

1．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=f(b)=0$．试证：对任意非零实数 λ，存在 $c\in(a,b)$，使 $\dfrac{f'(c)}{\lambda}+e^{\lambda c}f(c)=0$．

2．设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a)-f(b)=g(a)-g(b)$．

试证：（1）（4 分）$\exists\,\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=g'(\xi)$．

（2）（10 分）$\exists\,\lambda_1,\lambda_2\in(a,b),\eta\in(\lambda_1,\lambda_2)$ 使得

$$\frac{f''(\lambda_1)-g''(\lambda_1)}{(a-\eta)^2}=\frac{f''(\lambda_2)-g''(\lambda_2)}{(b-\eta)^2}.$$

3．求证：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$.

治学团学业辅导群欢迎大家的加入!

群号：796348624